ウェイク場、インピーダンスとロスファクター

1. はじめに

この講義ノートは加速器科学の初心者の人を対象にインピーダンスとウェイク場の問題を解説したものである。インピーダンスとウェイク場の問題は今までにも OHO シリーズの中でたびたび取り上げられていて[1、２]、加速器物理を勉強する人にとって必修科目である。この講義ノートの内容の多くは OHO９６と０５[2]で講義者が書き残した講義ノートに準拠していている。今回はビーム不安定性の部分は別の講師が行うとのことで割愛した。一方、ロスファクターについては多少加筆した。

インピーダンス、ウェイク場といった問題はさまざまな教科書（Zotter-Kheifets[3]、Chao[4]）で説明され、比較的馴染み易い分野にもかかわらず、実際に加速器を取り巻くさまざまな装置に対し応用しようとすると、なかなかうまくいかないことが多い。これはインピーダンスやウェイク場は、誘起された電磁場をビーム不安定性理論に取り込みやすいように加工したものであるが、肝心の電磁場に対する直感的で電磁気学（RF）的な理解がないと、インピーダンスの評価や機器の設計が難しいからである。結局、マイクロ波工学を多少勉強しないと空洞や導波管中の電磁場の様子やその伝播の仕方がよくわからない。マイクロ波工学の更なる解説は OHO84 を参照して下さい。

全体の構成は以下のとおりである。まず入門として空洞や導波管内での電磁波の様子について勉強する。次にウェイクの説明に移り、そのフーリエ展開としてインピーダンスを導入する。最後にロスファクターについて簡単に説明をする。

2. 空洞や円形導波管内での電磁場

インピーダンスとウェイク場を勉強する前に、まず導波管や空洞内に於ける電磁場とその伝播に関する一般的な知識を学習しよう。

2.1. 円形導波管内での電磁波

後述するウェイク場を考える前に、ビームチェンバーや空洞の中での電磁場の様子やその伝播について勉強する。円形加速器のビームチェンバーや空洞などは円形の形をしていることが多く、またそれらが円形対称性を持つと仮定する、あるいは近似したほうが取り扱いが簡単になる場合が多いので、ここでは円形の形をした導波管や空洞のみを考える。境界条件が軸対称性をもつので、円柱座標を使って電磁界を記述するのが便利である。円形導波管を伝播する電磁波は TM 波（磁界は横波であり、進行方向成分をもたない）と TE 波（電界は横波であり、進行方向成分をもたない）がある。TE 波は、進行方向に傾きをもたないで直進するビームとは相互作用しないので、円形加速器のビーム不安定性理論ではあまり取り扱わない。ここでは時間の都合で TM 波だけを考える。

時間方向と z 方向(進行方向)空間の一様性のために、電場界は一般的に

$$E_z = E_r(r)\cdot E_\theta(\theta)\cdot \exp(i\omega t - i\beta z) \qquad (2.1)$$

と書ける。また軸回転方向 θ に関しても、電磁界の円形導波管一周に渡る周期性（$E_\theta(\theta+2\pi)=E_\theta(\theta)$）からフーリエ展開ができ、その結果、

$$E_z = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_{rm}(r)\cdot \exp(im\theta)\cdot \exp(i\omega t - i\beta z) \quad (2.2)$$

を得る。ここで m は整数である。インデックス m はこの電磁解の軸方向に関する周期性を表しており、モードと呼ばれている（*m=0* はモノポール(電磁界は軸対称)、*m=1* はダイポール)。これ以降は電磁場の z 方向成分だけを考え、電磁界の記号にも z のインデックスを省略する。さて、$\theta=0$ の原点をどこにとるかは任意なので、簡単のため、式（2.2）を

$$E = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_{rm}(r)\cdot \cos(m\theta)\cdot \exp(i\omega t - i\beta z) \quad (2.3)$$

と書こう。この一般解をマックスウェル方程式に入れると、$E_{rm}(z)$ に関する波動方程式を得る：

$$\frac{d^2E_{rm}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dE_{rm}}{dr}+(k_c^2-\frac{m^2}{r^2})E_{rm}=0\,. \qquad (2.4)$$

ここで

$$k=\omega/c$$
$$k_c^2=k^2-\beta^2 \qquad (2.5)$$

である。

この方程式の解はベッセル関数で表わされる：

$$E_{rm}(r)=J_m(k_c r)\,. \qquad (2.6)$$

円形導波管の半径を a とすると、導波管の内壁では電解の接線成分はゼロになるので、$E_{rm}(z)$ は半径 a でゼロになる。即ち、

$$J_m(k_c a)=0\,. \qquad (2.7)$$

つまり $k_c a$ は m 次のベッセル関数のゼロ根である。これによって変数β と周波数ω とが関係づけられる。m 次のベッセル関数のゼロ根は無限にあり、表 1 にその一部を示した。

次数 m のベッセル関数の n 番目のゼロ根を ρ_{mn} と書くとすると、$k_c=\rho_{mn}/a$ であるから、境界条件を満たす電磁場の m次のモードの z 方向成分は

$$E_{zm}=J_m(\frac{\rho_{mn}}{a}r)\cdot\cos(m\theta)\cdot\exp(i\omega t-i\beta z) \qquad (2.8)$$

Table 1 m 次のベッセル関数のゼロ根 ρ_{mn}。

m \ n	1	2	3
0	2.40	5.52	8.65
1	3.83	7.02	10.17
2	5.14	8.42	11.62

となる。 図 1 に E_{z0}(モノポールモード)の導波管内径方向分布の一例を示した。式（2.5）から位相定数β は

$$\beta=\sqrt{k^2-k_c^2}=\sqrt{k^2-\left(\frac{\rho_{mn}}{a}\right)^2} \qquad (2.9)$$

で与えられるので、$k<\rho_{mn}/a$ の時はこの電磁界は導波管中を伝播せず、 z の方向に指数関数的に減衰していく。つまり、電磁界の周波数が

$$\omega_c=c\frac{\rho_{mn}}{a} \qquad (2.10)$$

以下のとき、式（2.8）で与えられる電磁波は導波管を伝播しない。言い換えれば、周波数が ω_c 以下の電磁波を円形導波管に入射することは出来ない。これを遮断周波数（カットオフ周波数）と呼ぶ。β の逆数は電磁波の導波管内での波長（管内波長 λ_g ）を与えるので、管内波長は

$$\lambda_g=\frac{2\pi}{\sqrt{k^2-\left(\frac{\rho_{mn}}{a}\right)^2}} \qquad (2.11)$$

となる。遮断周波数で管内波長は無限大になる。

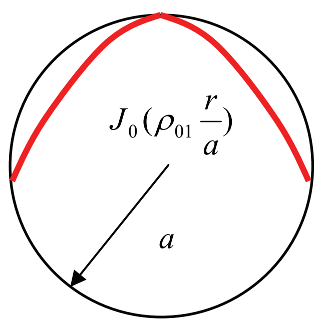

Fig. 1 円形導波管内での TM01、E_{z0} （モノポールモード)の導波管内径方向分布。

その他の電磁場解成分は以下のようになる：

$$E_{rm}=-i\frac{\beta}{(y_{mn}/a)}\cos(m\theta)J_m^{'}(\frac{\rho_{mn}}{a}r)\exp(i\omega t-i\beta z)$$

$$E_{\theta m}=i\frac{m\beta}{(y_{mn}/a)^2}\sin(m\theta)\frac{1}{r}J_m(\frac{\rho_{mn}}{a}r)\exp(i\omega t-i\beta z)$$

$$E_{zm}=\cos(m\theta)J_m(\frac{\rho_{mn}}{a}r)\exp(i\omega t-i\beta z)$$

$$H_{rm}=-i\frac{m\varepsilon_0\omega}{(y_{mn}/a)^2}\sin(m\theta)\frac{1}{r}J_m(\frac{\rho_{mn}}{a}r)\exp(i\omega t-i\beta z)$$

$$H_{\theta m}=-i\frac{\varepsilon_0\omega}{(y_{mn}/a)}\cos(m\theta)J_m^{'}(\frac{\rho_{mn}}{a}r)\exp(i\omega t-i\beta z)$$

$$H_{zm}=0$$

(2.12-17)

ここで $J_m^{'}(x)$ は $J_m(x)$ の x に関する微分である。この様に導波管内の電磁波は、進行方向成分の有無と θ 方向の依存性を表すモード番号 m、径方向の依存性を表すモード番号 n によって分類することができる。そこで磁場が進行方向成分を持たない TM 波はモード番号 m と n によって TM_{mn} モードと書くことにする。例として TM_{01} モード（モノポールモード）と TM_{11} モード（ダイポールモード）の電磁界分布を図２に示す。

2.2. 円形空洞内の電磁場

次に、この円形導波管の両端に板を置いて短絡してみよう。この時は、電場の径方向と軸方向成分が短絡した面で境界条件（＝完全導体との境界では電場の接線方向成分はゼロ）を満たさなくてはならない。つまり、両端を短絡した導波管（空洞）内では進行方向に完全な定在波ができる。以上の条件は空洞での管内波長の 1/2 の整数倍が空洞の長さ L と等しい時に満たされる。式（2.11）から

$$L=l\frac{\lambda_g}{2}. \tag{2.18}$$

これによって空洞内の共振周波数が決まる：

$$(kc)^2=\left(\frac{\rho_{mn}}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi l}{L}\right)^2. \tag{2.19}$$

整数 m,n,l は無限にあるので、空洞の半径 a と長さ L が決まっても、空洞の共鳴モードは無数にある。それらを TM_{mnl} モードと呼ぶ。その幾つかの例を図３に示した。

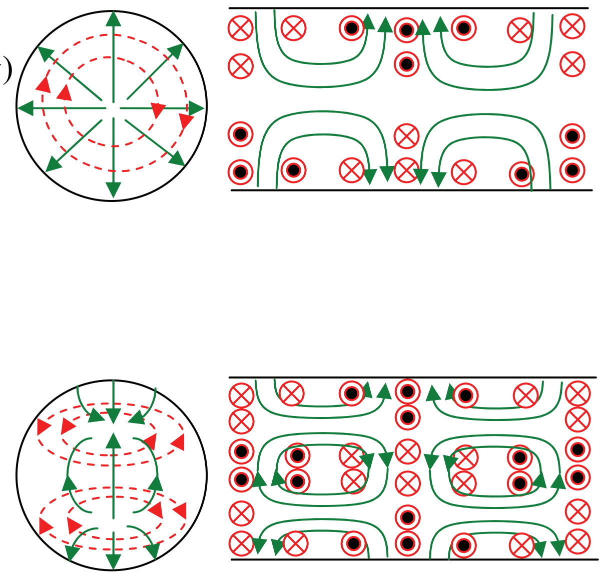

Fig. 2 円形導波管内の電磁界分布。（上）TM_{01} モード（モノポール）、（下）TM_{11} モード（ダイポール）。

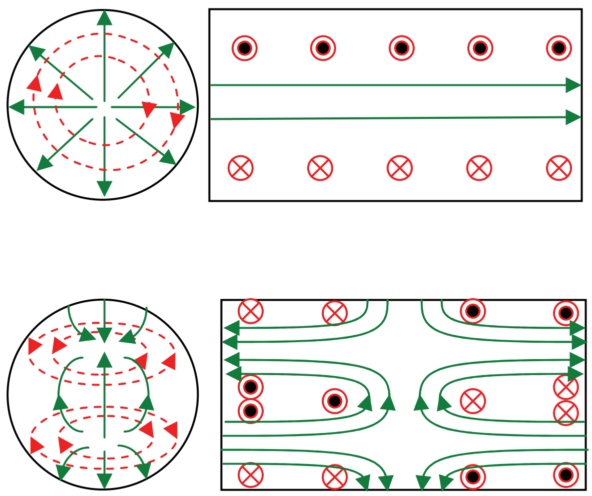

Fig. 3 円形空洞内の電磁界分布。（上）TM_{010} モード（モノポール）、（下）TM_{111} モード（ダイポール）。

実際に加速器で使用される空洞はもっと形状が複雑であるが、最大の違いは空洞の両端が完全に短絡した板があるのではなく、その中心に穴があいており（穴の半径を b としよう）、そこに円形導波管が繋がっていることである（この円形導波管の中をビームが通る）。その様子を図４に示した。

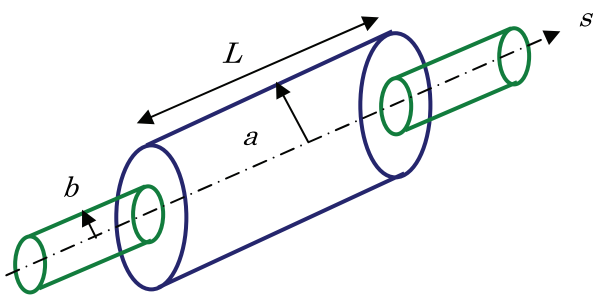

Fig. 4 円形空洞とその両端についた円形ビームチェンバー（ピルボックス空洞）。

この様に円形空洞の両端に円形ビームチェンバーを繋げたものをのをピルボックス空洞と呼ぼう（円形ビームチェンバーがなくてもピルボックス空洞と呼ぶが）。さて、円形導波管が両端に繋がっている時の共鳴モードを考えてみよう。前章でこの円形導波管には式（2.10）で与えられる遮断周波数（a を b に置き換える必要あり）があることを学習した。つまり式（2.19）で与えられる空洞の $\mathrm{TM_{mnl}}$ モードの共鳴周波数がこの遮断周波数より低いときにのみ、このモードは空洞内に留まる。言い換えれば、空洞の $\mathrm{TM_{mnl}}$ モードの共鳴周波数がこの遮断周波数より大きいときは、そのモードは導波管を通じて外へ伝播していってしまう。

次に空洞内にトラップされた共鳴モードを考えよう。このモードの周波数はビームチェンバーの遮断周波数より低いので、空洞内にトラップされているが、減衰する波として、その一部はビームチェンバーの中にも存在する。モードの共振周波数がビームチェンバーの遮断周波数と近い時には、ビームチェンバーのかなり遠くまでモードの一部が広がることもある。この電磁場の漏れのため、空洞の実効的な空間が広がったように見える。従って空洞内の共振周波数はビームチェンバーがない時と比べて若干下がる。

2.3. 空洞の並列共振回路モデル

最後に空洞共振器を集中定数回路で表現しよう。一般に集中定数回路における共振回路は LRC の直列共振回路と LGC の並列共振回路が考えられるが、空洞共振器や加速器に於けるその他の多くのインピーダンス源は並列共振回路でモデル化されることが多い。図５は LGC の並列共振回路の一例である。

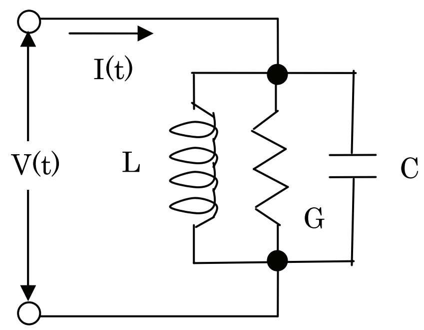

Fig. 5 空洞共振器と等価回路の LGC 並列共振回路。

並列共振回路では回路に流れる全電流は LGC それぞれの回路要素を流れる電流の和に等しい。つまり、

$$I(t) = C\frac{dV}{dt} + GV + \frac{1}{L}\int V dt \,. \qquad (2.20)$$

ここで C はキャパシタンス（静電容量）、G はアドミッタンス（抵抗の逆数）、L はインダクタンスである。電流と電圧がそれぞれ $I(t) = \hat{I}\exp(i\omega t)$、$V(t) = \hat{V}\exp(i\omega t)$ の様に振動していると仮定すると、式（2.20）は

$$\hat{I} = Y\hat{V} \qquad (2.21)$$

と書け、ここで

$$Y(\omega) = i\omega C + G - i\frac{1}{\omega L} \tag{2.22}$$

であり、Yをアドミッタンスと言う。並列共振回路のインピーダンスは Yの逆数である：

$$Z(\omega) = \frac{1}{Y(\omega)}. \tag{2.23}$$

このインピーダンスを空洞の特性を表す３つのパラメーターで表現すると以下の様になる：

$$Z(\omega) = \frac{R_s}{1 + iQ\left(\frac{\omega_R}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_R}\right)}. \tag{2.24}$$

ここでω_Rは共振周波数

$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \tag{2.25}$$

Qはクオリティファクター或はＱ値

$$Q = \frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}}, \tag{2.26}$$

R_sはシャントインピーダンス

$$R_s = \frac{1}{G} \tag{2.27}$$

である。空洞の特性を評価する時によく使われるR_s / Qは

$$\frac{R_s}{Q} = \sqrt{\frac{L}{C}} \tag{2.28}$$

で与えられ、Gによらない。

以上で空洞共振器を並列共振回路でモデル化した。次に実際にビームが空洞を通過した時に、LGC 回路のそれぞれの要素は空洞で起こる何に対応しているか考えよう。図６にその対応を示した。ビーム電流I_bを持ったビームが空洞を通過すると、電磁誘導によって空洞内の磁場の変化を妨げる向き、つまりビームの進行方向と逆向きに誘導起電力が生じ、空洞のインダクタンスに比例する鏡像電流I_Lが空洞の表面に流れる。空洞の材質に抵抗があると、更に起電力が生じ、I_Rの電流がビーム電流の向きと逆向き流れる。空洞のギャップ間には電荷がたまるため、変位電流I_Cが流れる。

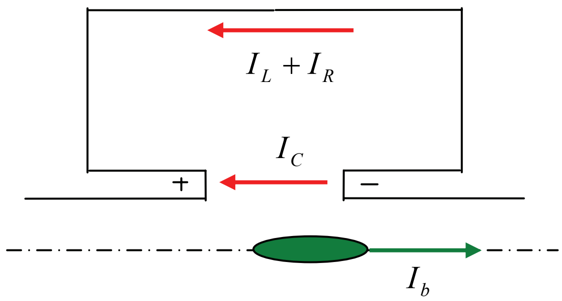

Fig. 6 ビームが空洞共振器を通過したときに誘起される電流の様子。

以上を総合すると、電荷の保存則から

$$I_b + I_L + I_R + I_C = 0 \tag{2.29}$$

が得られる。この式を回路に誘導される起電力 Vの式として書き換えると

$$\frac{1}{L}\int V dt + \frac{V}{R} + C\frac{dV}{dt} = -I_b \tag{2.30}$$

となる。ここでアドミッタンスＹを

$$Y \cdot V = -I_b \tag{2.31}$$

と定義するとアドミッタンスは式（2.22）で表され、その逆数である空洞のインピーダンスも式（2.24）で表される。

3. ウェイク場

さて、いよいよビームとそれを取り巻く構造体との間の電磁的相互作用の問題に移ろう。相互作用の結果出来る電磁場をウェイク場と呼ぶ。　まず、どうしてウェイク場ができるのかを考えてみよう。

3.1. ウェイク場

完全導体で出来た真っ直ぐなチェンバーの中心を光速で直進する粒子を考える。チェンバーの外側で電磁場がゼロになる様にチェンバーの内側の表面上に鏡像電流が誘起され、粒子との間に電磁場の雲ができる。そして全体がそのまま光速で前方に移動していく。境界の効果はこの鏡像電流によって置き換えることができるので、以下境界の存在をわすれてもかまわない。さて、チェンバーの先で口径が急に広がっているとしよう（図７参照）。　粒子はそのまま直進するが鏡像電流はパイプに沿ってその軌道が曲げられるだろう。その時、鏡像電流はシンクロトロン放射を出す。これがウェイク場である。広がったチェンバーの替りにチェンバーの材質が電気伝導率有限の物質になっていたとしよう。　鏡像電流は急に減速され、前方に制動輻射を出す。　これもウェイク場である。つまりウェイク場とは鏡像電流の軌道が曲げられた時、或は加速、減速された時（つまり、横方向か縦方向に加速が加わった時）に鏡像電流が出す輻射なのである。では輻射のエネルギーはどこから来るのか。もちろん最終的には粒子からである。輻射場、粒子、そして鏡像電流と粒子間の電磁場、この３つの間でエネルギーのやり取りがなされる。こうして、ウェイク場を鏡像電流が出す輻射と考えると、その軌道を考察することで、どこでウェイク場が作られ易いかが直感的に理解できる。

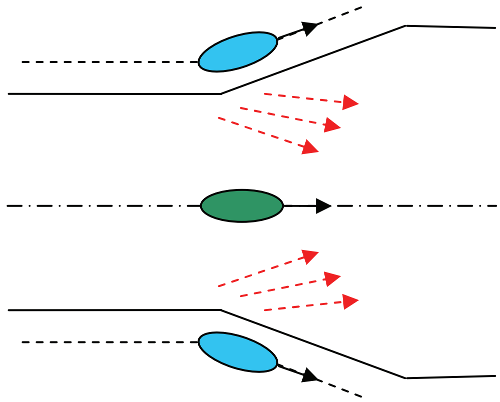

Fig. 7　鏡像電流によるウェイク場の発生。

ウェイク場は境界条件付きでマックスウェル方程式を解くことによって求められる。　しかしこれは大変な作業であり、ビーム不安定性とインピーダンスの問題を検討するときに最も多くの時間はここに費やされる。　解析的に計算できる場合は極めて限られていて、円形のチェンバーが小さく波打っている場合や、真っ直ぐなチェンバーが非完全導体でできている場合などだけである。　殆どの場合、ABCI [5]や MAFIA [6]などの計算機コードを使って計算する。

3.2. ウェイクポテンシャル

さて、粒子の作るウェイク場が計算できたとしよう。今度はそのウェイク場が粒子の（ウェイク場を作った粒子だけでなく、周りの他の粒子も含めて）運動にどう影響を与えるかを考えてみよう。これはビーム不安定性の解析をする際の重要なインプットになるので、解析に便利な様に結果をうまくパラメーター化しておく必要がある。

粒子の運動方程式を書くためには、ウェイク場が引き起こす粒子の運動量の変化を知らなければならない。粒子がウェイク場の雲の中を通過する間に起きる軌道変化が十分に小さければ、ウェイク場による粒子の運動量変化の総量を知れば充分である。

議論を簡単にするために、ウェイク場は軸対象構造体の中で出来るとする。対称性から電磁場は

軸の周りの角度 θ に関して $\cos m\theta$ の形にフーリエ展開できる。次数の低い順に モノポール（$m=0$）、ダイポール（$m=1$）と呼ぶ。殆どの場合、問題となるビーム不安定性はこの２つの成分を考慮すれば充分である。　さて、上手な解析の第一歩はウェイク場を誘起する粒子の集まり（これを誘導ビームと呼ぶ）をどう用意するかにある。単純に針の様なビームを用意し、それが軸対象構造体の軸からずれたとして話を展開すると、モノポールやダイポールだけではなく、全ての高次のモードを一編に考えていかなくてはならない。これでは都合が悪いので、誘導ビームとして $\cos m\theta$ の電荷分布をもったリングを考える（図８参照）。リングの半径を r_0 とし、リングの中心は構造体の軸上を走る。 そうすると次数 m の電磁場を考えるときは $\cos m\theta$ の電荷分布をもったリングを用意すればよく、違う次数の電磁場の計算には別のリングを用意して別々に行えばよい。しかも、リングの電流密度を、電荷 q の点電荷が $\theta=0$ の方向に r_0 のオフセットを持った時と同じモーメントを持つ様に選んでおくと後で都合が良い：

$$\lambda=\frac{qc}{\pi r_0(1+\delta_{m0})}\delta(z-ct)\delta(r-r_0)\cos m\theta . \tag{3.1}$$

ここで c は光速度であり、δ_{m0} はクロネッカーのデルタである。

次にこのウェイク場から力を感じる別の粒子（試験粒子）を考える（図８を参照）。　この粒子は同じバンチの中で誘導ビームを構成する粒子群と一緒に（軸と平行に）動いてる粒子を念頭においている。２つの軸方向における相対的位置がウェイク場を通過中にあまり変わらないとして、誘導ビームが軸方向の位置 z にいる時に試験粒子は誘導ビームの後方 s のところを走っているとしよう。　試験粒子は軸から r だけ離れた所を走るとする。この試験粒子が時間 t の時、軸方向の位置 z で受ける縦方向、横方向（径方向）のローレンツ力を F_L，　$\mathbf{F}_T$ とする：

$$F_L=eE_z\cos m\theta , \tag{3.2}$$

$$\mathbf{F}_T=e(E_r-c\cdot B_\theta)\cos m\theta\cdot\mathbf{r}\equiv F_T\cos m\theta\cdot\mathbf{r} \quad . \tag{3.3}$$

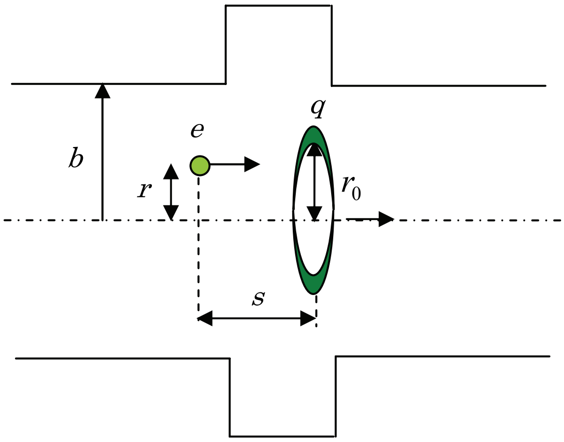

Fig. 8　リング状の誘導ビームと試験粒子との位置関係。

ここで、　$\mathbf{r}$ は放射方向の単位ベクトルであり、E_z、E_r と B_θ はそれぞれ $\theta=0$ での電場と磁場の軸方向、径方向と角度方向の成分である。試験粒子がウェイク場の雲を通過中に受ける運動量変化の総量は試験粒子に乗った系で受ける力を積分すれば求まる：

$$\begin{aligned}\Delta p_Z &= \int_{-\infty}^{\infty} dz F_L(z,t=\frac{z+s}{c}) \\ &\equiv -eqW_{Lm}(s)\cdot r_0^m r^m\cos m\theta\end{aligned} \quad . \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{p}_T &= \int_{-\infty}^{\infty} dz\mathbf{F}_T(z,t=\frac{z+s}{c}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dzF_T(z,t=\frac{z+s}{c})\cdot\cos m\theta\cdot\mathbf{r} \\ &\equiv eqW_{Tm}(s)\cdot mr_0^m r^{m-1}\cos m\theta\cdot\mathbf{r}\end{aligned} \quad . \tag{3.5}$$

ここでは証明を省くが、マックスウェル方程式を変換すると、以上の様に定義された $W_{Lm}(s)$ と $W_{Tm}(s)$ は誘導ビームの半径や試験粒子が構造体

のどこを走っているかによらないことが分かる（つまり運動量変化の r_0 や r 依存性は式（3.4）と（3.5）に明確に表現されている）[4]。従って、関数 $W_{Lm}(s)$ と $W_{Tm}(s)$ は構造体の形状によって一意的に決まる関数で、これをウェイクポテンシャルと言う。 誘導ビームは光速で走っていると仮定すると（これは陽子ビームでは当てはまらない時もあるが)、ウェイクポテンシャルは誘導ビームの前方でゼロになる：

$$W_{Lm}(s) = W_{Tm}(s) = 0 \quad (s < 0)\,. \tag{3.6}$$

試験粒子の運動量変化の式（3.4)と(3.5)をもう少し詳細に調べて見よう。

● モノポール場（*m=0*)

この時、当然のことながら対称性から横方向のウェイクポテンシャルはゼロである。さて、式（3.4）から試験粒子の運動量変化は誘導ビームのリングの半径にも、また試験粒子の位置にもよらない。結局、

→ 試験粒子の運動量変化は誘導ビームと試験粒子の相対距離だけの関数である。

● ダイポール場 （*m=1*)

式（3.5）から、運動量変化は誘導ビームのリングの半径に比例するが、自分自身の構造体の軸からのオフセットの量とその向きにはよらない。一方、$\cos m\theta$ の電荷分布をもったリングはその電流密度の選択より、構造体の軸から $\theta = 0$ の方向に r_0 だけオフセットをもった電荷 q のビームと同じモーメントを持っている。結局、

→ 試験粒子の運動量変化の大きさは誘導ビームのオフセットに比例する。その向きは $W_{Tm}(s)$ が正（負）ならば、誘導ビームのオフセットの向き（逆向き）と同じである。

3.3. Panofsky-Wenzel theorem

さて、縦方向と横方向のウェイクポテンシャル $W_{Lm}(s)$ と $W_{Tm}(s)$ との間には Panofsky-Wenzel theorem と呼ばれる関係がある[7]：

$$W_{Tm}(s) = \int_0^s ds W_{Lm}(s)\,. \tag{3.7}$$

この関係はこのままでは殆ど役にたたない。なぜなら次数 m の $W_{Lm}(s)$ を計算できるほどに電磁場解が解かっているならば、同じ次数の $W_{Tm}(s)$ も直接、定義に従って計算できるはずで、Panofsky-Wenzel theorem に頼る必要はないからである。この関係はむしろモノポール場での $W_{L0}(s)$ が計算できるが、ダイポール場の $W_{T1}(s)$ の計算が困難な場合や、ダイポール場の $W_{T1}(s)$ の直接の計算を端折りたいときに、モノポール場の $W_{L0}(s)$ からダイポール場の $W_{T1}(s)$ を近似的に求めるときに用いられる。よく使われる近似式は

$$W_{T1}(s) \approx \frac{2}{b^2}\int_0^s ds W_{L0}(s) \tag{3.8}$$

で、ここで b はビームチェンバーの内径である。

3.4. ウェイクポテンシャルの振る舞い

さて、 Panofsky-Wenzel theorem (3.7)と式（3.6）より横方向のウェイクポテンシャルは原点ではゼロであることがわかる：

$$W_{Tm}(0) = 0\,. \tag{3.9}$$

一方、縦方向のウェイクポテンシャルの原点近傍での振る舞いはどうであろうか。エネルギーの保存法則から誘導ビームの作ったウェイク場が持つエネルギーは、誘導ビームのエネルギーによって補われなければならない。従って誘導ビームはウェイク場によって減速される力を受ける筈である。つまり、

$$\lim_{s\to +0} W_{L0}(s) > 0\,. \tag{3.10}$$

さてεを微小な量とすると、位置$s=-\varepsilon$ではウェイクポテンシャル$W_{L0}(s)$はゼロであり$s=\varepsilon$では$W_{L0}(\varepsilon)$の値を持っているとして、$s=-\varepsilon$と$s=\varepsilon$の間でウェイクポテンシャルを直線で繋ぐと、$s=0$ではウェイクポテンシャルは$W_{L0}(\varepsilon)/2$の値をもつことがわかる：

$$W_{L0}(0) = \frac{W_{L0}(\varepsilon)}{2}\,. \tag{3.11}$$

つまり、誘導ビームはそのすぐ後ろの試験粒子が受ける減速力の半分の力を受ける。これを“Fundamental theorem of beam loading” [8]と呼ぶ。　以上の結果をまとめると、縦方向と横方向のウェイクポテンシャルは一般的に図９でスケッチした様に振る舞う。

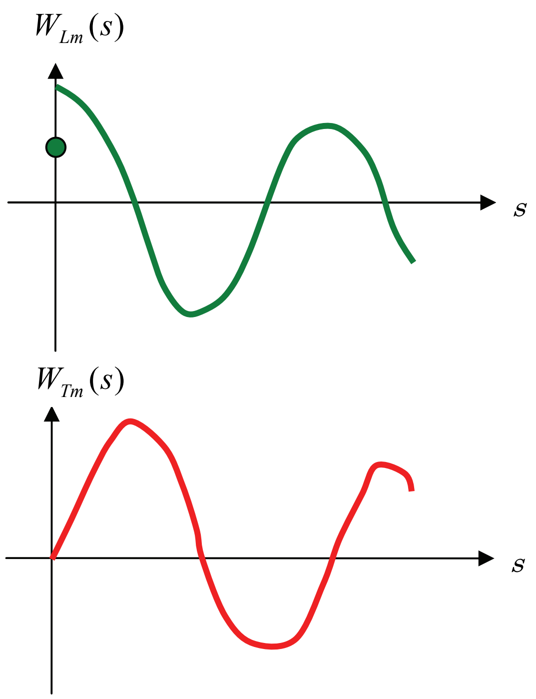

Fig. 9　一般的な縦方向と横方向のウェイクポテンシャルのスケッチ。

さて、誘導ビームが進行方向に薄いリングのような形状をしている時に、誘導ビームは自分が作った縦方向のウェイク場を感じることができるのに、どうして横方向の場合はそれができないのかを考えてみよう。　簡単のために誘導ビームの半径はビームチェンバーのそれと等しいと仮定し、ウェイク場は図８に示したような空洞で出来るとしよう。　また、縦方向の代表としてモノポール場を、横方向の代表としてダイポール場を考える。　この章の第２節で説明した様に、ウェイク場は導体の表面を走る鏡像電流からの輻射によって作られる。この輻射は当然前方にでるので、長い距離を走る内に誘導ビームに追い付くことができる。このことは縦方向と横方向の場合で変わらない。それではなぜ横方向の場合、誘導ビームは自分が作るウェイク場から力を受けないのか。その鍵は鏡像電流の流れ方の違いにある。縦方向の場合、鏡像電流はビームチェンバー上を軸対称的に流れるが、横方向の場合、鏡像電流の向きが上下で（$\theta=0$と$\theta=\pi$とで）逆転していて、違った角度にある鏡像電流からの輻射の差が横方向のローレンツ力を作っている。従って、例えば$\theta=0$の軌道を走る試験粒子は$\theta=0$で発せられた輻射のみならず、他の部位（例えば$\theta=\pi$）で発せられた輻射がビームチェンバー上を斜めに走ってきて追い付いて始めて横方向のローレンツ力を感じるのである。この場合、$\theta=0$以外での輻射の軌道は誘導ビームのそれより長くなるため誘導ビームに追い付くことはできない。つまり、誘導ビームは自分が作った横方向ウェイク場を感じないのである。

最後に指摘しておきたいのは、ウェイクポテンシャルを定義、導入する過程で、誘導ビームも試験粒子も光速で移動していると仮定したことである。低エネルギー（１，２GeV 以下）の陽子ビームの場合、この仮定はあまりよい近似とはいえない。しかし、この章で述べたウェイクポテンシャルの性質の多くはこの仮定の上で成り立つ。また、次章で説明するインピーダンスが、構造体の性質で決まり、ビームのパラメーターによらないためにもこの仮定は必要である。この辺りで多少の不整合が存在するが、理論全体をすっきりさせるために、必要な仮定（近似）である。

4. インピーダンス

4.1. インピーダンスの定義

前章で求めたウェイクポテンシャルは、ビームの振る舞いを時間領域で調べるのに都合が良く、トラッキング等を行う時に便利である。 しかしビームの振る舞いを解析的に調べようとすると、周波数領域で議論した方が簡単で都合が良いことが多い。 そこでインピーダンスという量を、第２章で学習した電気回路や RF での定義に沿うように定義しよう。以下、説明の簡略化のためにモノポール場での縦方向インピーダンスとダイポール場での横方向インピーダンスの場合に議論を限る。 実用上、これで十分である。

縦方向の電流分布 $I(\tau)$ を持った誘導ビームを考える(図１０参照)。ビームの横方向分布は任意でよいが、ビーム重心はチェンバーの軸から r_0 のオフセットを持つとする。 この電流のフーリエ変換 $I(\omega)$ を以下の様に定義する。:

$$I(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau I(\tau)\exp(i\omega\tau)\,. \qquad (4.1)$$

このビームの先端から距離 s だけ遅れて走る試験粒子を考える。この粒子がウェイク場から受ける軸方向電場の積分値（つまり電圧）は

$$V(s)=\int_{-\infty}^{\infty}dzE_Z(z,t=\frac{(z+s)}{c}) \qquad (4.2)$$

で与えられる。この電圧をフーリエ変換して周波数の関数としたものを $V(\omega)$ とする：

$$V(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{c}V(s)\exp(i\omega\frac{s}{c})\,. \qquad (4.3)$$

電圧、電流のフーリエ変換が定義されたので、これらを使って縦方向インピーダンス $Z_L(\omega)$ を以下の式で定義する：

$$V(\omega)=-Z_L(\omega)I(\omega)\,. \qquad (4.4)$$

ここで、インピーダンスの前に負の符号をつけたのは電圧 V を直接作っているのは鏡像電流であり、それは $-I$ で与えられるからである（章 2.3 の図 6 を思い出そう）。

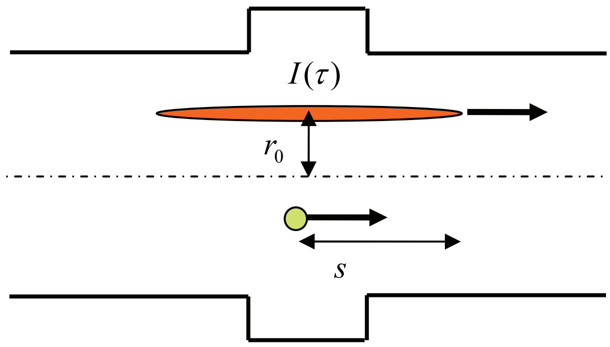

Fig. 10 縦方向の電流分布 $I(\tau)$ を持った誘導ビームとその先端から距離 s だけ遅れて走る試験粒子。

ダイポール場での横方向インピーダンスも同様に定義できる：

$$V_T(\omega)=iZ_T(\omega)\cdot r_0 I(\omega)\,. \qquad (4.5)$$

ここで $r_0 I(\omega)$ は横方向ダイポール電流のフーリエ変換である。定義（4.5）に虚数 i を導入したのは、横方向電圧の位相が電流の位相より 90 度ずれることが多いのを考慮してあるからである。

さて、誘導ビームとして特別に、光速で移動する電荷 q 、半径 r_0 のリング(i.e., $I(\tau)=q\delta(\tau)$)を考えると、インピーダンスとウェイクポテンシャルとの間の関係が導き出せる。この場合、試験粒子が受ける電圧は、式（3.4）を使って

$$V(s)=-qW_{L0}(s) \qquad (4.6)$$

となる。つまりウェイクポテンシャルその物である。この電圧のフーリエ変換は

$$V(\omega) = -\frac{q}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{c}W_{L0}(s)\exp(i\omega\frac{s}{c}) \tag{4.7}$$

となる。また電流のフーリエ変換は

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau I(\tau)\exp(i\omega\tau) = \frac{q}{2\pi}. \tag{4.8}$$

で与えられる。式（4.4）、（4.7）、（4.8）から、$Z_L(\omega)$ は縦方向ウェイクポテンシャル $W_{L0}(s)$ のフーリエ変換に等しいことが分かる：

$$Z_L(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{c}W_{L0}(s)\exp(i\omega\frac{s}{c}). \tag{4.9}$$

同様に、横方向インピーダンスと横方向ウェイクポテンシャルとは

$$Z_T(\omega) = \frac{1}{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{c}W_{T1}(s)\exp(i\omega\frac{s}{c}) \tag{4.10}$$

の関係がある。

ここで注意する必要があるのは、インピーダンスの定義は式（4.4）と（4.5）であって、式（4.9）と（4.10）はインピーダンスとウェイクポテンシャルの間の関係を示しているにすぎない。つまり、インピーダンスはウェイクポテンシャルを知らなくてもその定義から独立に計算できる。むしろインピーダンスを求めて、それからウェイクポテンシャルを関係（4.9）及び（4.10）の逆変換を使って計算することはよくある。次の節でそれらの例を幾つか上げる。

4.2. インピーダンスの性質

その前にビーム不安定性を考える時に役立つ大事な指摘をしておく。周波数 ω が正と負の領域でのインピーダンスの間にはウェイクポテンシャルが実数であるために、次の関係がある：

$$Z_L(-\omega) = Z_L^*(\omega), \tag{4.11}$$

$$Z_T(-\omega) = -Z_T^*(\omega). \tag{4.12}$$

縦方向の場合、インピーダンスに周波数を掛けたり割ったりしたものがビーム不安定性の公式に現れることが多いので、実際には横方向と同じポーラリティを持つと考えた方が都合が良い。　図１１に典型的なインピーダンスとして空洞型インピーダンスを例にとり、その周波数依存性を概念的に示した。

第３章で学習した Panofsky-Wenzel theorem をインピーダンスで表すと

$$Z_{Tm}(\omega) = \frac{c}{\omega}Z_{Lm}(\omega) \tag{4.13}$$

となる。また同じ章で、*m=0* の縦方向ウェイクポテンシャルと *m=1* の横方向ウェイクポテンシャルを関係づける便利な近似式（3.8）を披露した。この近似式に対応して、それぞれのインピーダンス間の関係も次の式で近似できる：

$$Z_T \cong \frac{2c}{b^2}\frac{Z_L}{\omega}. \tag{4.14}$$

この近似式はかなり広く使われている。

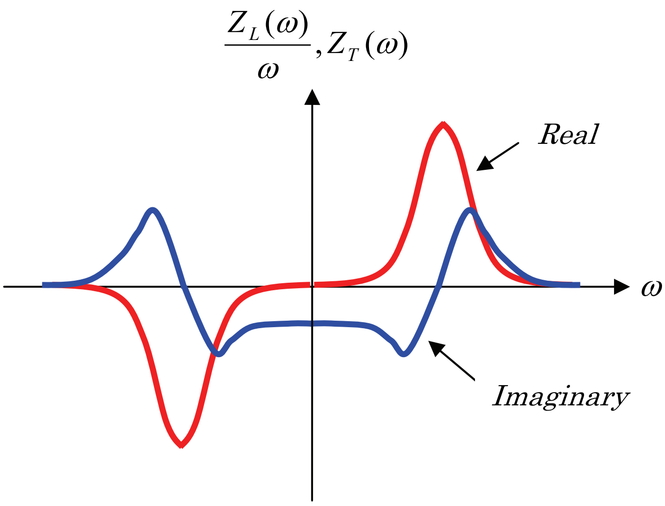

Fig. 11 縦方向（Z_L/ω）と横方向（Z_T）インピーダンスの概念図。

4.3. インピーダンスの種類

さて、インピーダンスにはどんな種類があるのだろう。典型的な縦方向インピーダンスを書いてみると

$$Z_L = -i\omega L + R_W\sqrt{\omega} + R_\Omega + \frac{R_c}{\sqrt{\omega}} + \dots \qquad (4.15)$$

ここで第１項はインダクタンス、第２項は resistive-wall インピーダンスと呼ばれ、ビームチェンバーが電気伝導率有限の物質でできている時に生じるインピーダンス、第３項は純粋な抵抗、そして最後の項は加速空洞の全インピーダンスの高周波成分である。第１項で L が負の時、加速器ではキャパシタンスと呼んでいる（本当のキャパシタンスは $i/(\omega C)$の周波数依存性を持つはずであるが）。もう一つ重要なインピーダンスにローレンツ型インピーダンスがある。第２章の並列共振回路の講義で学習した様に、加速空洞のインピーダンスはこの形で書ける：

$$Z_L(\omega) = \frac{R_L}{1 + iQ(\frac{\omega_R}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_R})}, \qquad (4.16)$$

$$Z_T(\omega) = \frac{R_T \frac{\omega_R}{\omega}}{1 + iQ(\frac{\omega_R}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_R})}. \qquad (4.17)$$

ここで R_L と R_T は縦方向と横方向のカップリングインピーダンス、Q はQ値で ω_R は共振周波数である。

これら代表的なインピーダンスに対応するウェイクポテンシャルは、式（4.9）と(4.10)の逆変換をすれば求まる。ここではインダクタンス、純粋な抵抗とローレンツ型インピーダンスのウェイクポテンシャルを列記するに留めよう：

1) インダクタンス:

$$W_{L0}(s) = Lc\frac{d}{ds}\delta(s/c). \qquad (4.18)$$

2) 純粋な抵抗

$$W_{L0}(s) = R\delta(s/c). \qquad (4.19)$$

3) ローレンツ型(共振空洞)インピーダンス

$$W_{L0} = \begin{cases} 0 & (s<0) \\ \alpha R_L & (s=0) \\ 2\alpha R_L e^{-\alpha\frac{s}{c}}\left[\cos\frac{\omega' s}{c} - \frac{\alpha}{\omega'}\sin\frac{\omega' s}{c}\right] & (s>0) \end{cases}$$

(4.20)

$$W_{T1} = \begin{cases} 0 & (s \le 0) \\ \frac{R_T\omega_R^2}{Q\omega'} e^{-\alpha\frac{s}{c}} \sin\frac{\omega' s}{c} & (s>0) \end{cases}.$$

(4.21)

ここで,

$$\alpha = \omega_R/(2Q), \qquad (4.22)$$

$$\omega' = \sqrt{\omega_R^2 - \alpha^2} \qquad (4.23)$$

である。

以上の様な形式的な説明では、インピーダンスの種類とその名前はわかっても、実際にどういった構造体がどういうインピーダンスを作るかはよくわからない。そこでいくつかの重要なインピーダンスを簡単に求めてみよう。

4.4. インダクタンス

まずインダクタンスの説明から始めよう。ビームチェンバー上に図１２で示した様な小さな空洞

のような構造体があり、このビームチェンバーの中心軸上をビームが通過するとする。

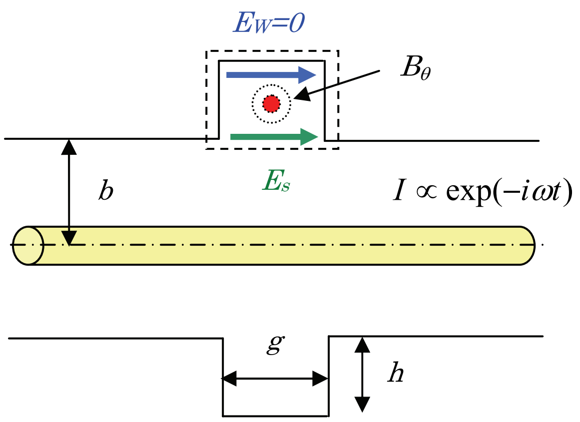

Fig. 12 小さな空洞の作るインダクタンス。

ビームと一緒に走る電磁場の中で、電場はビームチェンバーの近傍では殆どゼロであるから、空洞の中では磁場だけを考えればよい。今知りたいのはギャップ間に立つ電場 E_s である。そこで点線で示した積分路を考える。 この積分路にそって電場の積分を行うと、それは空洞内の磁場の時間変化の反対符号に等しい（ファラデーの法則）：

$$\oint \mathbf{E}d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}\,. \tag{4.24}$$

ビームチェンバーが完全導体で出来ているとすると($E_w = 0$)、左辺はギャップ間電圧そのものである：

$$V = \int_{gap} E_s ds\,. \tag{4.25}$$

さて問題は右辺である。ビーム電流を I とし、$\exp(-i\omega t)$ の様に時間変化するとする。 すると空洞内の磁場は（ギャップの深さはパイプの半径に対し充分小さいとして、磁場が一定と見なせると仮定）

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \tag{4.26}$$

で与えられる。すると式（4.24）の右辺は

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = i\omega\frac{\mu_0 gh}{2\pi b}I \tag{4.27}$$

となる。ここで μ_0 は真空の透磁率である。式(4.25)、(4.26)、(4.27) よりギャップ間電圧が求まる：

$$V = i\omega\frac{\mu_0 gh}{2\pi b}I\,. \tag{4.28}$$

インピーダンスの定義よりこの小さな空洞が作るインピーダンスは以下の式で与えられる：

$$Z_L = -i\omega\frac{\mu_0 gh}{2\pi b} = -i\omega\frac{Z_0 gh}{2\pi bc}\,. \tag{4.29}$$

これはインダクタンスである。ここで $Z_0 = c\mu_0$ は真空のインピーダンス（=120πΩ)である。 円形加速器では、ビームは円形加速器の回転周波数の整数倍の周波数でしかインピーダンスを誘起しない。従ってこのインピーダンスを、$\omega = n\omega_0$（ω_0 は円形加速器の回転周波数、n は整数）を使って次の様に書く：

$$\begin{aligned}\frac{Z_L}{n} &= -i\omega_0\frac{Z_0 gh}{2\pi bc} \\ &= -i\beta\frac{Z_0 gh}{2\pi bR}\end{aligned}\,. \tag{4.30}$$

ここで β は粒子の速度を光速で割った量であり、R は円形加速器の平均半径である。この結果はギャップ間電圧が空洞内に立つ磁場の誘導起電力によることを考えれば（つまりギャップはコイルの役割をする）容易に理解できる。バンチが長い陽子ビームでは殆どの構造体はこの様にインダクタンスに見える。

4. 5. Resistive-wall インピーダンス

次にこの空洞の中が電気伝導率が大きいが有限である物質で満たされているとしよう。 この場合、電磁場はスキンデプス以上にはこの物質の中に入っていかない。ここでスキンデプスは

$$\delta_s = \sqrt{\frac{2\rho_c}{\omega\mu_0}} \tag{4.31}$$

で与えられる（$\rho_c = 1/\sigma_c$ は体積抵抗率)。従って空洞の深さがスキンデプス以上であれば、結果は空洞の深さによらないはずである。そこで、いっそ空洞の深さをスキンデプスにとってしまおう。

$$h = \delta_s \tag{4.32}$$

空洞の中が電気伝導率有限の物質で満たされている効果は、式（4.24）の左辺（電場の線積分）に現れる。図１２で示した積分路のうち、空洞の両端の壁を径方向に走る電場は対称性からゼロである（電場は径方向を向いている)。従って空洞の奥の内壁で進行方向の成分を持つ電場 E_w の寄与だけを考えれば良い。この電場を正確に求めるのは実は簡単でなく、Leontovich 条件と呼ばれる関係が電場 E_w と磁場は H_θ の間にあることを使って求める：

$$E_w = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_c}} H_\theta . \tag{4.33}$$

ここで表面インピーダンス

$$\varsigma = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_c}} \tag{4.34}$$

は複素誘電率

$$\varepsilon_c = \varepsilon_0 + \frac{\sigma_c}{i\omega} \tag{4.35}$$

によって定義されている。ここで $\sigma_c = 1/\rho_c$ は導体の電気伝導率である。電気伝導率が十分大きいと仮定すると($\sigma_c >> \varepsilon_0\omega$)、表面インピーダンスは以下の式で近似できる：

$$\varsigma \approx \sqrt{\frac{i\omega\mu_0}{\sigma_c}} = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{\sigma_c}} . \tag{4.36}$$

この式を Leontovich 条件（4.33）に入れて、磁場を B_θ で表すと、変換の末、

$$E_w = \frac{\omega}{2} \delta_s (1+i) B_\theta \tag{4.37}$$

が求まる。この電場の寄与を式（4.24）の左辺に足して前節と同じ様に式を展開すると（$h = \delta_s$ と設定したことを忘れないで)、ギャップ間電圧が次の様に求まる：

$$\begin{aligned} V &= -\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} - \int E_w ds \\ &= i\omega \frac{\mu_0 g \delta_s}{2\pi b} I - \frac{\omega}{2}\delta_s (1+i) g \frac{\mu_0 I}{2\pi b} . \\ &= -\frac{\omega}{2}(1-i)\frac{Z_0 g \delta_s}{2\pi bc} I \end{aligned} \tag{4.38}$$

インピーダンスは定義から

$$Z_L = \frac{\omega}{2}(1-i)\frac{Z_0 g \delta_s}{2\pi bc} \tag{4.39}$$

となる。 前節同様にこのインピーダンスを円形加速器の回転周波数の整数倍の周波数（$\omega = n\omega_0$）での形に書き換えると、次のようになる：

$$\frac{Z_L}{n} = Z_0 \beta \cdot \left(\frac{1-i}{2}\right) \frac{\delta_s}{b} \frac{g}{2\pi R} . \tag{4.40}$$

これが縦方向の resistive-wall インピーダンス[9]である。　ビームチェンバーが非完全導体でできているときのインピーダンスを与える。

横方向の resistive-wall インピーダンスは縦方向の resistive-wall インピーダンスから式（4.14）を使って以下の様に求まる：

$$Z_T = Z_0(1-i)\frac{g\delta_s}{2\pi b^3}. \tag{4.41}$$

$\delta_s \propto 1/\sqrt{\omega}$ の周波数依存性のために、横方向の resistive-wall インピーダンスは低周波で急激に増大する。そのため、大電流陽子加速器では横方向の resistive-wall インピーダンスが最も深刻な横方向インピーダンスになることが多い。

さて、縦方向の resistive-wall インピーダンスの式（4.39）の物理的意味合いを考えて見よう。第１項、インピーダンスの実部は抵抗を表しているが、これは次の様にしても求まる。この空洞は図１３の様な体積抵抗率 ρ_c の円筒のパイプ（半径 b、厚さ δ_s、長さ g）と考えてよく、その電気回路的な抵抗値は下の式で与えられる：

$$\mathrm{Re}\,Z_L = \frac{\rho_c g}{2\pi b\delta_s}. \tag{4.42}$$

この中で ρ_c/δ_s は次の様に変換できる：

$$\begin{aligned}\frac{\rho_c}{\delta_s} &= \frac{\rho_c}{\sqrt{\dfrac{2\rho_c}{\omega\mu_0}}} = \frac{\omega\mu_0}{2}\sqrt{\frac{2\rho_c}{\omega\mu_0}} \\ &= \frac{\omega\mu_0}{2}\delta_s = \frac{\omega}{2}\frac{Z_0}{c}\delta_s\end{aligned}. \tag{4.43}$$

従って、式（4.42）は以下の様に書き換えることができる：

$$\mathrm{Re}\,Z_L = \frac{\omega}{2}\frac{Z_0 g\delta_s}{2\pi bc}. \tag{4.44}$$

これは式（4.39）の第１項と同じである。つまり、式（4.39）の第１項はこの物質の抵抗そのものなのである。次に式（4.39）第２項を見てみよう。この項はインダクタンスを与えている。この項を導出するために図１３の円筒形パイプの両端に内径 b の完全導体のビームチェンバーに繋がっていると考えよう。また円筒形パイプの外側は完全導体で囲まれているとする（電磁場はスキンデプス以上に入らないので外側の完全導体の効果はない）。その断面の様子を図１４に示した。すると非完全導体の円筒形パイプは一種の空洞を構成する。磁場はこの空洞内部で指数関数的に減衰するから、空洞の外半径での磁場をゼロと近似すると、実効的な磁場は内部が真空の時の磁場（4.26）の約半分ぐらいになる：

$$B_\theta \approx \frac{1}{2}\times\frac{\mu_0 I}{2\pi b}. \tag{4.45}$$

後は前節のインダクタンス計算の手順通りに式を展開すればよく、結局インピーダンスの虚部は式（4.27）で $h=\delta_s$ と置き、全体を２で割った量で与えられる：

$$\mathrm{Im}\,Z_L = -i\frac{\omega}{2}\frac{Z_0 g\delta_s}{2\pi bc}. \tag{4.46}$$

実部（4.44）と虚部（4.46）を合わせると式（4.39）になる。

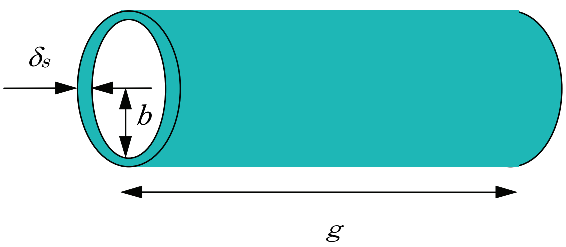

Fig. 13　Resistive-wall インピーダンス計算のために想定する円筒形パイプ。

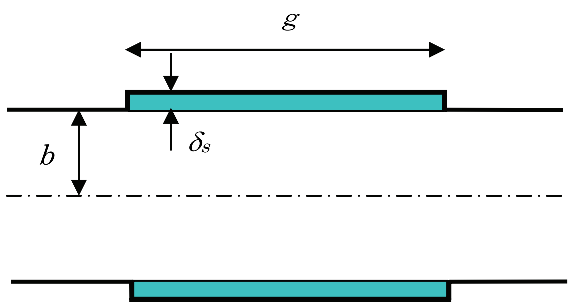

Fig. 14 非完全導体の円筒形パイプが構成する空洞。

実は、ここで求められた resistive-wall インピーダンスの公式はスキンデプスがチェンバーの壁の厚みより小さい高周波の領域でしか有効ではない。スキンデプスがチェンバーの壁の厚みより大きい低周波の領域を含めた正しい取り扱いについては参考文献[10]を参照されたい。

4.6. 縦方向スペースチャージインピーダンス

最後に縦方向のスページチャージ（これを空間電荷とも呼ぶ）インピーダンスを求めよう[11]。 ビーム内の粒子は他の粒子からクーロン反発力を受ける。縦方向（進行方向）には、前方の粒子はバンチの中心から前方に押し出される様な力を受け、後方の粒子は後方に押し戻される。この力はインダクタンスの効果と逆の方向である。求め方はインダクタンスの場合と似ている。ビームチェンバーは完全導体で出来ているとして、その半径を b とする。積分路は図１５のようにビームの中心軸を沿って走るものを考える。ビームチェンバー表面上の接線方向電場 E_w は境界条件よりゼロである。インダクタンスの場合との違いは積分路がビームの内部まで入っているので、ビームが在る時のビームチェンバー内の電磁場をちゃんと求めておく必要があることである。 また電場の径方向成分も自由空間上なのでゼロではなく、結果に大きく寄与する。また、結果はビームの横方向分布に依存する。 簡単のため、ビームは円筒形をしていて、粒子は横方向に一様に分布していると仮定しよう。後で参考のためパラボラ分布の時の結果も記す。

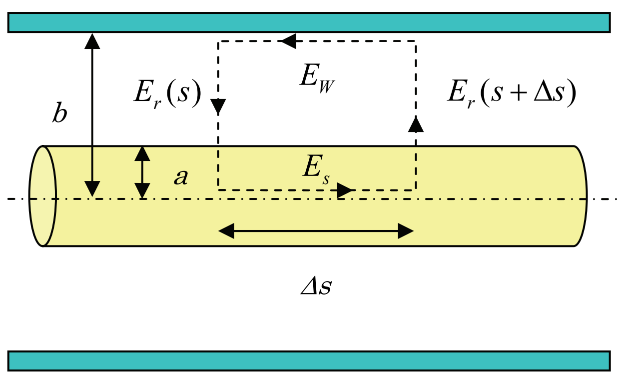

Fig. 15 縦方向スページチャージ（空間電荷）インピーダンス計算のための積分路の取り方。

さて、円筒形ビームの半径を a とし、ビームの進行方向線密度を λ とした時に、横方向の電磁場は

$$E_r = \begin{cases} \dfrac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} & (r \ge a) \\ \dfrac{e\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{a^2} & (r < a) \end{cases}, \tag{4.47}$$

$$H_\theta = \begin{cases} \dfrac{e\lambda\beta c}{2\pi}\dfrac{1}{r} & (r \ge a) \\ \dfrac{e\lambda\beta c}{2\pi}\dfrac{r}{a^2} & (r < a) \end{cases} \tag{4.48}$$

で与えられる。 ここで、ε_0 は真空の誘電率を、βc は粒子の速度を表す。 インダクタンスの場合と同様に図１５で示された積分路にそって電場の積分を行うと、それは空洞内の磁場の時間変化の反対符号に等しい（ファラデーの法則）：

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}. \tag{4.49}$$

まずこの式の左辺から片付けよう。ビームチェンバーが完全導体で出来ているとすると $E_w = 0$ である。位置 $s+\Delta s$ と s での電場の径方向の積分を式（4.47）を使って実行すると、式（4.49）の左辺は以下の様になる：

$$\oint \mathbf{E}d\mathbf{l} = E_s \Delta s + \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(1+2\ln\frac{b}{a}\right)\left(\lambda(s+\Delta s)-\lambda(s)\right)$$
$$= E_s \Delta s + \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(1+2\ln\frac{b}{a}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial s}\Delta s$$
(4.50)

式（4.49）の右辺も同様に計算でき、

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = -\frac{\mu_0 e\beta c}{4\pi}\left(1+2\ln\frac{b}{a}\right)\Delta s\frac{\partial\lambda}{\partial t} \quad (4.51)$$

となる。ここで、式（4.50）と（4.51）を式（4.49）に挿入し、関係式

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = -\beta c\frac{\partial\lambda}{\partial s} \quad (4.52)$$

を使って全体を書き改めると以下の式を得る：

$$\begin{aligned} E_s &= -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(1-\beta^2\right)\cdot\left(1+2\ln\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial s} \\ &= -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0\gamma^2}\cdot\left(1+2\ln\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial s} \\ &= -\frac{eZ_0 c}{4\pi\gamma^2}\cdot\left(1+2\ln\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial s} \end{aligned} \quad . \quad (4.53)$$

ここで

$$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \quad (4.54)$$

と

$$Z_0 c = \frac{1}{\varepsilon_0} \quad (4.55)$$

の関係式を使った。加速器リング一周に渡る電圧は式（4.53）の両辺に$2\pi R$をかけることで得られる。ビーム電流Iは

$$I = e\beta c\lambda \quad (4.56)$$

で与えられので、更にジオメトリカルファクター

$$g_0 = 1+2\ln\frac{b}{a} \quad (4.57)$$

を導入して式(4.53)を書き改めると、

$$V = E_s\cdot 2\pi R = -\frac{\partial I}{\partial s}Z_0 R\frac{g_0}{2\beta\gamma^2} \quad (4.58)$$

となる。電流Iの位置s依存性を

$$I = I_0 + I_1\exp i\left(\frac{n}{R}s-\omega t\right) \quad (4.59)$$

として、式（4.58）に入れ整理すると、以下の式を得る：

$$V = -in\cdot Z_0\frac{g_0}{2\beta\gamma^2}I_1 . \quad (4.60)$$

従って、縦方向のスページチャージインピーダンスは定義から以下の式で与えられる：

$$\frac{Z_L}{n} = i\frac{Z_0 g_0}{2\beta\gamma^2} . \quad (4.61)$$

　ジオメトリカルファクターはビームの横方向の分布関数によって変わる。以下の関数で与えられるパラボラビームの場合、

$$\rho(r) = \frac{N_p}{\pi^2 a^2 R}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right] \quad (4.62)$$

ジオメトリカルファクターは

$$g_0 = 1.5+2\ln\frac{b}{a} \quad (4.63)$$

となる。

式（4.61）をよく見ると縦方向のスページチャージインピーダンスはインダクタンスと逆の符号を持っていることに気がつくだろう（つまり、キャパシタンスの様に働く）。またγ^2ファクターのため高エネルギーでは効かなくなることもわかる。　このファクターは電場と磁場の寄与が高エネルギーでは打ち消し合うために起こる（電場は押し出そうとし、磁場は押し戻そうとする）。

横方向のスページチャージインピーダンスは結果だけを書くに留める：

$$Z_T = i\frac{Z_0 R}{\beta^2\gamma^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right). \tag{4.64}$$

4.7. 穴やスロットのインピーダンス

インピーダンスの最後の例として、穴やスロットのインピーダンスを学習しよう。加速器のビームチェンバーには真空を引くための穴や、フィンガー形式のベローなど、さまざまな理由でさまざまな形状の穴があいている。これらは殆ど小さなインダクタンスを作るが、穴の数が膨大になり、総量ではその効果を無視できなくなることがある。穴のインピーダンスは、加速器では教科書にもあまり記述のない、一見馴染みのない分野に見えるが、ジャクソンの教科書やベーテの論文にも載っている電磁気学ではきわめて古典的な問題である。穴のインピーダンスの定式化には、以前学習した小さな空洞のインピーダンスなども含めて、ビームチェンバー上の摂動(突起物、溝、穴など)が古典電磁気学でどう処理されるかの面白い考察がある。これを学習することは、インピーダンスの生成のメカニズムを理解する上で重要である。

4.7.1. 小さな空洞の作る電磁気ダイポール

まず、小さな空洞が作るインダクタンスを別の観点から考え直そう[12]。図１２の様な小さな空洞を考える。ビーム電流はこの空洞の中に

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \tag{4.65}$$

で与えられる磁場を作り、この磁場は空洞の中をトロイダルの様に回転する磁束を作る：

$$\Phi_m = \int_S B(r)dS\,. \tag{4.66}$$

ここで積分は図１２で示された様に空洞の断面に渡っての面積分である。空洞が十分小さければ磁束は

$$\Phi_m \approx B_\theta S \tag{4.67}$$

で近似できる。ここで

$$S = gh \tag{4.68}$$

はこの空洞の断面の面積である。ファラディーの法則から、この磁束の時間変化は電磁誘導によって起電力を作る：

$$V = i\omega\Phi_m\,. \tag{4.69}$$

一方、磁束Φ_mがある時の磁極の大きさはΦ_m/μ_0であるから、空洞一周の磁気ダイポールモーメントMは

$$M = \frac{2\pi b\Phi_m}{\mu_0} \tag{4.70}$$

となる(図１６参照)。更に単位長さ当りの磁気ダイポールモーメントは

$$m = \frac{M}{2\pi b} = \frac{\Phi_m}{\mu_0} \tag{4.71}$$

で与えられる。つまり、空洞の近くに磁場H_θがあると式（4.71）で与えられる磁気分極が起きる

わけである。そこで磁気分極率を以下の様に定義すると、

$$m = \alpha_m H_\theta(b), \tag{4.72}$$

磁気分極率は式（4.71）から

$$\alpha_m = \frac{\Phi_m}{\left(\mu_0 H_\theta(b)\right)} \tag{4.73}$$

で求められる。因みに、小さな空洞の場合、これは面積 S と一致する：

$$\alpha_m = S = gh. \tag{4.74}$$

式（4.65)、(4.69）と（4.73）より、この磁気分極が作る縦方向インピーダンスは

$$Z_{L(m)} = -\frac{V}{I} = -i\omega \frac{Z_0 \alpha_m}{2\pi bc} \tag{4.75}$$

で与えられる。結局この式は以前求めた式 (4.29) と同じであるが、考え方が微妙に違う。以前は空洞内にビーム電流が作った磁場が進入し、その磁場の時間的変化が電磁誘導によって空洞のギャップ間に起電力を作り、それがインピーダンスを作ると考えた。今回は空洞の近傍に磁場をかけたときに、その磁場が空洞内に磁気分極を引き起こし、その磁気分極場の中を試験粒子が走るときに力を受けて、それがインピーダンスになると考えている。空洞の場合は軸対象構造体であるから、内部の磁場は軸方向に一様で簡単に求まり、その磁場のインピーダンスへの寄与も簡単に計算できる。パイプ上の穴の場合、軸方向に局所的な磁場を作るので、こういった方法は使えない。しかし、この節で紹介した方法を使うと、ビームチェンバーの形状に摂動がある時にどういう磁気分極が起きるかが分かればインピーダンスは計算できる。磁気分極率 α_m を摂動法を使って求められる場合はこの方法が適している。

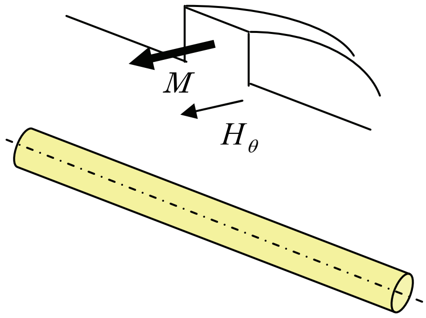

Fig. 16　空洞一周の磁気モーメント M。

以上に述べたトロイダル中の磁場が作る磁気ダイポールモーメントの他に、ビームが作る電場(或は電気ポテンシャル)がビームチェンバー上の摂動(小さな空洞)によって乱されることによって出来る電気ダイポールモーメントもある。磁気モーメントの場合は磁場の時間的変化が電磁誘導によって起電力を生じ、それがビームに力を及ばしたが、電場の場合は時間的変化は関係ないので、電磁場の時間的変動を無視する。そうすると電場はスカラーポテンシャル $\phi(z)$ によって表現でき、その z-方向の微分が電場の z-方向成分を与える：

$$E_z = -\frac{\partial \phi(z)}{\partial z}. \tag{4.76}$$

この E_z が作るインピーダンスを計算しよう。その前に式（4.2）と（4.3)、及び（4.4）を合体させて、E_z から直接インピーダンスを計算する式を作ろう。ビーム電流が

$$I(z,t) = I_0 \exp(-i\omega t) \tag{4.77}$$

の様に時間的に変化をしていると仮定すると、全ての電磁場もこれに従う。そこで E_z も $\exp(-i\omega t)$ の様に時間的変化をするとして、これを式（4.2) の中の E_z に応用し、式 (4.3）と（4.4）を使うと、縦方向インピーダンスは以下の式で与えられる：

$$Z_{L(e)}(\omega) = -\frac{V(\omega)}{I_0} = -\frac{1}{I_0}\int_{-\infty}^{\infty} dz E_z(z,r)\exp(-i\frac{\omega}{c}z) \quad . \qquad (4.78)$$

式（4.76）を上の式に入れて、偏積分を行うと

$$Z_{L(e)}(\omega) = i\frac{\omega}{I_0 c}\int_{-\infty}^{\infty} dz \exp(-i\frac{\omega}{c}z)\big(\phi(z)-\phi_\infty\big) \approx i\frac{\omega}{I_0 c}\int_{-\infty}^{\infty} dz\big(\phi(z)-\phi_\infty\big) \quad .$$

(4.79)

ここでスカラーポテンシャル $\phi(z)$ は原点近傍（*z=0*）に局所的に存在し、考えている波長がギャップの距離よりずっと長いと仮定し、$\exp(-i\omega z/c) \approx 1$ の近似を行った。スカラーポテンシャル $\phi(z)$ は径方向の位置によるが、積分は *r=b* のパイプの半径上で行うとしよう。そうすると積分の寄与は空洞の近傍だけとなる。

　さて、ビームが作る電場は径方向を向いているが、空洞近傍では電場はどうなるか。図１７はその様子を示している(図１９の穴の場合も参照して下さい)。

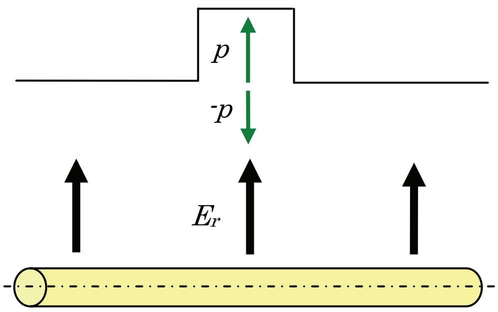

Fig. 17 空洞に誘起される電気ダイポールモーメント。

この電場の様子は場所 *z=0*、*r=b* のところに２つの電気モーメントが径方向を逆に向いて存在しているのと同等である。するとスカラーポテンシャル $\phi(z)$ は

$$\phi(z) = \phi_\infty + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{px}{x^2+z^2} \qquad (4.80)$$

で与えられる。ここで

$$x = r - b \qquad (4.81)$$

であり、p は空洞の周方向単位長さあたりの電気ダイポールである。この電気ダイポールを求めることは簡単ではないので、ここでは求めない。以後は分かっているとして話を進める。式（4.80）を式（4.79）に挿入して積分を実行すると、*x<0* の領域で

$$Z_{L(e)}(\omega) = -i\frac{\omega}{I_0 c}\frac{p}{2\varepsilon_0} \qquad (4.82)$$

となる。ここで電気ダイポールモーメント p を電気分極率 α_e を使って表現しよう：

$$p = \alpha_e \varepsilon_0 E_r \qquad (4.83)$$

ここで E_r は *r=b* での径方向電場であり、

$$E_r = \frac{I_0/c}{2\pi\varepsilon_0 b} \qquad (4.84)$$

で与えられる。電気分極率 α_e は磁気分極率 α_m の類推から面積の次元を持っていると思われる。式（4.83）と式（4.84）をインピーダンスの式（4.82）に入れると最終的に以下の式に到達する：

$$Z_{L(e)}(\omega) = -i\omega\frac{Z_0\alpha_e}{4\pi bc} . \qquad (4.85)$$

この電気ダイポールは空洞の入り口から外では径方向の正の方向を向いており空洞の入り口から内では負の方向を向いている（つまり $\alpha_e < 0$）。従ってこの電気ダイポールの効果は磁場とは逆に負のインダクタンスを作る。実は、以前小さな

空洞の作るインピーダンスを導いた時、この電気ダイポールの寄与は考えていなかった。因みに $g<h$ の時の電気分極率 α_e は

$$\alpha_e = -\frac{g^2}{\pi} \tag{4.86}$$

で与えられる。電気ダイポールの寄与は磁気ダイポールの寄与よりファクター $2\pi h/g$ だけ小さい。

4.7.2.　穴やスロットのインピーダンス

さて、ビームチェンバー上に小さな空洞などの摂動がある時、それらが作る磁気ダイポールモーメントや電気ダイポールモーメントを計算することでインピーダンスを計算できることが分かった。チェンバー上に穴やスロットがある場合も同様にそれらが作る電気磁気ダイポールモーメントを計算すればインピーダンスを計算できる。

　ビームチェンバー上に一つの穴、或はスロットがあると仮定しよう。小さな空洞のインピーダンスの計算ではダイポールモーメントはチェンバーの周上に一様に存在したが、今回はチェンバーの周上に一つしかないので、そのインピーダンスへの効果は $2\pi b$ だけ小さくなる。一般に穴やスロットが作る縦方向インピーダンスは以下の式で与えられる[13]：

$$Z_L(\omega) = -iZ_0 \frac{\omega}{c}\frac{(\alpha_m+\alpha_e)}{4\pi^2 b^2}. \tag{4.87}$$

ここで α_m と α_e は穴やスロットの磁気分極率と電気分極率である。穴が作る磁気、電気ダイポールモーメントの様子を図１８，１９に示した。

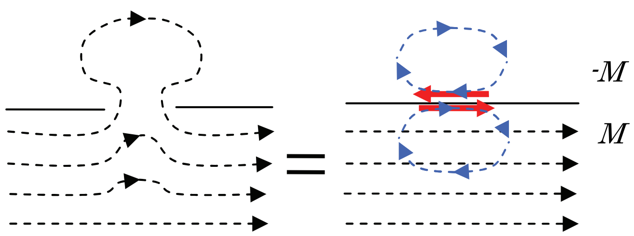

Fig. 18　穴による磁気ダイポールモーメント。

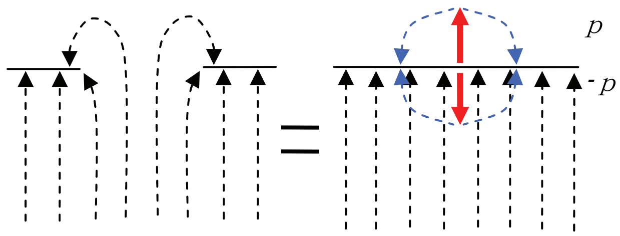

Fig. 19　穴による電気ダイポールモーメント。

　以下に幾つかのケースについて磁気分極率と電気分極率の例を示す：

1.　半径 a の丸い穴

$$\alpha_m = \frac{4}{3}a^3, \quad \alpha_e = -\frac{2}{3}a^3. \tag{4.88}$$

2.　ビームの進行方向に長い幅 w、長さ l の長方形スロット（$x = w/l \le 1$）

$$\alpha_m = \frac{\pi}{16}w^2 l\left(1+0.3577x-0.0356x^2\right), \quad \alpha_e = -\frac{\pi}{16}w^2 l\left(1-0.5663x+0.1398x^2\right). \tag{4.89}$$

3.　ビームの進行方向に長い幅 w、長さ l のレーストラック形スロット（$x = w/l \le 1$）

$$\alpha_m = \frac{\pi}{16}w^2 l\left(1-0.0857x-0.0654x^2\right), \quad \alpha_e = -\frac{\pi}{16}w^2 l\left(1-0.7650x+0.1894x^2\right). \tag{4.90}$$

4.　ビームの進行方向と直角方向に長い幅 w、長さ l の長方形スロット（$0.1 \le x = w/l \le 1$）

$$\alpha_m = \frac{0.132}{\ln(1+0.66/x)}l^3. \tag{4.91}$$

5. ビームの進行方向と直角方向に長い幅 w、長さ l のレーストラック形スロット（$0.1 \le x = w/l \le 1$）

$$\alpha_m = \frac{0.187 + 0.052x(1-x)}{\ln(1+2.12/x)} l^3 . \qquad (4.92)$$

ビームの進行方向と直角方向に長いスロットの場合、電気分極率は磁気分極率に比べて十分無視できるくらい小さい。

5. ロスファクター

最後にロスファクターについて触れておこう。ロスファクターには縦方向と横方向があり、それぞれの方向でビームが自分が作ったウェイク場から受けるキックの大きさを表す。ウェイク場の大きさを評価する時に便利な量である。

5.1. 縦方向のロスファクター

ビームがインピーダンスを持つ構造体を通過するとき、幾ばくかのエネルギーを損失する。損失の量はビームの進行方向の形状に依存する。ビームの総電荷を q としたとき、構造体を一回通過した時のエネルギー損失は以下の式で与えられる：

$$\Delta E = -q^2 k_L . \qquad (5.1)$$

ここで量 k_L はロスファクターと呼ばれ、

$$k_L = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \rho(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} dt \rho(\tau - t) W_{L0}(\beta ct) \qquad (5.2)$$

で定義される。これは進行方向に線密度 $\rho(\tau)$ を持ったビームがウェイクポテンシャルを作った時、そのウェイクポテンシャルをビーム自身が感じてビームがエネルギーを損失する割合を示している(図２０参照)。線密度 $\rho(\tau)$ のフーリエ変換 $\hat{\rho}(\omega)$ を使うと、ロスファクターはインピーダンスを使っても表現できる：

$$k_L(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \operatorname{Re} Z_L(\omega) \left| \hat{\rho}(\omega, \sigma) \right|^2 . \qquad (5.3)$$

ここで、σ は時間で測ったバンチ長である（バンチ長が σ_s の時、$\sigma = \sigma_s / \beta c$ ）。

ビームの進行方向線密度がガウシアン分布をしている場合、ロスファクターは

$$k_L(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \operatorname{Re} Z_L(\omega) \exp(-\omega^2 \sigma^2) \qquad (5.4)$$

で与えられる。ロスファクターはプログラムABCI などを使って任意の軸対象構造体の場合に計算できる。一旦ワンパスのロスファクターが計算できれば、リングの様に、同じ構造体を周回の度に通過する場合の単位時間あたりのエネルギー損失、つまりパワー損失を以下の式で計算できる：

$$P_{loss} = 1.6 \times 10^{-19} \cdot N_p \cdot I_b \cdot k_L \quad . \qquad (5.5)$$

ここで N_p は一バンチ中の粒子の数であり、I_b は総ビーム電流（多バンチの場合はバンチ電流の総和）である。

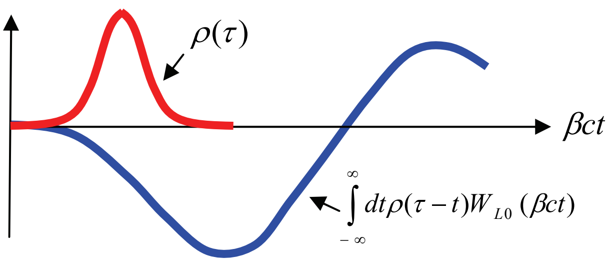

Fig. 20　線密度 $\rho(\tau)$ を持ったビームが作るウェイクポテンシャル。

式(4.16)で表される加速空洞のインピーダンスによるロスファクターの近似公式[14]を表２にまとめた。

Table 2　加速空洞のインピーダンスによる縦方向ロスファクターの近似公式。

場合	$k_L \approx$
Q が大きい（>10）	$\frac{\omega_R R_L}{2Q}\exp(-\omega^2\sigma^2)$
短いバンチ（$\omega_R\sigma << 1$）	$\frac{\omega_R R_L}{2Q}\left[1-\frac{2}{\pi}\frac{\omega_R\sigma}{Q}\right]$
Q が小さく長いバンチ	$\frac{R_L}{4\sqrt{\pi}Q^2\omega_R^2\sigma^3}$

チェンバーの半径よりも小さい開口部を持った加速空洞のような構造物を、やはりチェンバーの半径よりも短いバンチが通った場合のロスファクターは、構造体の精確な形状によらず、開口部のサイズ、チェンバーの半径とバンチ長の三つがわかれば、かなりの精度で計算することができる[15]。これは構造体への一回の通過ではバンチは構造体の形状の詳細を見る時間がなく、ウェイク場は主にバンチと構造体の開口部との間の相互作用で生じるからである。この場合のロスファクターの計算公式は参考文献[15]に与えられている。

5.2. 横方向のロスファクターまたはキックファクター

横方向のロスファクターはキックファクターとも呼ばれ、ビームが自分が作ったウェイク場から受ける横方向キックの大きさを表し、ビームのコヒーレントなベータトロン周波数を決定する。キックファクターは以下の式で定義される：

$$k_T = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\rho(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} dt\rho(\tau-t)W_{T1}(\beta ct)\,. \tag{5.6}$$

式(4.10)の逆フーリエ変換を使ってウェイクポテンシャルをインピーダンスに置き換えると、キックファクターをインピーダンスからも計算できるようになる：

$$\begin{aligned} k_T(\sigma) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega Z_T(\omega)\left|\hat{\rho}(\omega,\sigma)\right|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \,\mathrm{Im}\, Z_T(\omega)\left|\hat{\rho}(\omega,\sigma)\right|^2 \end{aligned}\;. \tag{5.7}$$

ビームの進行方向線密度がガウシアン分布をしている場合、キックファクターは

$$k_T(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \,\mathrm{Im}\, Z_T(\omega)\exp(-\omega^2\sigma^2) \tag{5.8}$$

で与えられる。　キックファクターk_Tによるビームのコヒーレントなベータトロン周波数のずれは以下の公式から計算できる：

$$\Delta\nu_\beta \approx \frac{1.6\times10^{-19}\cdot N_p\cdot\beta_T\cdot k_T}{4\pi E_0/e}. \tag{5.9}$$

ここでβ_Tはビームにキックを与える構造体でのベータ関数で、E_0はビームのエネルギーである。

図１１の横方向インピーダンスの概念図から見て取れるように、横方向インピーダンスの虚部は低い周波数で負であることが多いので、キックファクターは通常負になる。結果として、ビームのコヒーレントなベータトロン周波数はインコヒーレントなベータトロン周波数よりも通常低くなる。

縦方向同様、式(4.17)で表される加速空洞のインピーダンスによるキックファクターの近似公式[14]を表３にまとめた。

Table 3　加速空洞のインピーダンスによる横方向キックファクターの近似公式。

場合	$k_T \approx$
短いバンチ（$\omega_R\sigma << 1$）	$\frac{\omega_R R_T}{Q}\frac{\omega_R\sigma}{\sqrt{\pi}}$
長いバンチ（$\omega_R\sigma >> 1$）	$\frac{R_T}{Q}\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma}$

参 考 文 献

[1] 鈴木敏郎（OHO86），久保浄（OHO91），赤井和憲（OHO94），阿部哲郎（OHO04）、菖蒲田義博（OHO10）

[2] 陳　栄浩、OHO96, OHO05.

[3] B. W. Zotter, S. A. Kheifets, “Impedances and Wakes in High-Energy Particle Accelerators”, (World Science Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 1998).

[4] A. W. Chao, “Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators” (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993).

[5] Y. H. Chin, “User’s Guide for ABCI Verion 8.8”, LBL-35258 (1994).

[6] T. Weiland, Particle Accelerators 15, 245 (1984).

[7] W. K. H. Panofsky and W. A. Wenzel, Rev. Sci. Instrum. 27, 967 (1956).

[8] Perry B. Wilson, AIP Proc. 87, Phys. High Energy Accelerators (Fermilab, 1981), p. 450.

[9] V. K. Neil and A. M. Sessler, Rev. Sci. Instrum. 36, 429 (1965).

[10] A. Burov and V. Lebedev, in Proceedings of the 8th European Particle Accelerator Conference, Paris, 2002), p. 1452.; E. Metral, B. Zotter, and B. Salvant, in Proceedings of the 2007 Particle Accelerator Conference, Albuquerque, New Mexico, 2007 (IEEE, Albuquerque, New Mexico, 2007), p. 4216.

[11] A. Hofmann, “Theoretical Aspects of the Behavior of Beams in Accelerators and Storage Rings”, CERN 77-13 (1977), p.139.

[12] S. S. Kurennoy and G. T. Stupakov, Particle Accelerators 45, 95 (1994).

[13] S.S. Kurennoy, Particle Accelerators 39, 1 (1992).

[14] A. W. Chao and M. Tigner, “Handbook of Accelerator Physics and Engineering” (World Science Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 1998).

[15] Y. Shobuda, Y, H, Chin and K. Takata, “Coupling Impedances of a Gap in Vacuum Chamber”, Phys. Rev. ST Accel. Beams 10, 044403 (2007).